Даннная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по статфизике
Мостовому Сергею Дмитриевичу

С.Д.: Я вот провёл исследование, «броуновское» ли движение или «брауновское». Оказывается, что с 50-х годов 20-того века «броуновское». А в процессе много книжек интересных почитал, хочу порекомендовать вам для общего развития. (начинает выписывать их на доску) Первая – это нашего современника, белорусского лингвиста, «Введение в теорию языка»…

Однажды в квантстат вселился радиофиз, и они решили разложить случайные процессы по спектру. Сегодня будет, возможно, самая скучная методичка во всём курсе – никаких новых физических результатов мы не получим, но зато будет много вычислительной хренотени – интегралов и Фурье.

Вот у нас есть случайный процесс $\xi(t)$. Мы его разложить по частотам, получив преобразование по частотам:

$$\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

Но что толку от них, если это случайные процессы, а не функции, которые мы можем померять?

То ли дело корреляционная функция:

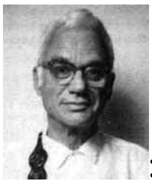
$$F(t_1, t_2) =< \xi(t_1)\xi(t_2) >$$

В силу марковости процесса (напомним, что мы работаем во 2 ГШВ времени) она является функцией одной переменной:

$$F(t_1, t_2) = F(t_2 - t_1) = F(t)$$

И у $F(t)$ преобразованием Фурье получается уже своя функция $J(\omega)$. Она называется спектром мощности. Табличка:

$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$	$\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$
$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$	$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

Дальше нам потребуется база. Обычно её выдаёт Павел Демидов, но на этот раз её выдал американский учёный Дуб :

T (Doob) для **гауссова стационарного марковского** случайного процесса верно:

$$F(t) = F(0)e^{-\Gamma|t|}, \qquad J(\omega) = J(0)\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \omega^2}, \qquad J(0) = \frac{F(0)}{\pi\Gamma}.$$

Посмотрим, как нам это поможет решать задачи.

Задача 41.

Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ характеризуется корреляционной функцией $F(t) = \overline{\xi^2}\exp\{-\Gamma|t|\}$ $\left(\overline{\xi^2} = F(0)\right)$. Найти корреляционную функцию $G(t)$ и соответствующую ей спектральную плотность $I(t)$ для процесса $\zeta(t) = \dot{\xi}(t)$.

Давайте в лоб подсчитаем $G(t)$:

$$G(t) = <\zeta(t_1)\zeta(t_2)> = <\frac{d}{dt_1}\xi(t_1)\frac{d}{dt_2}\xi(t_2)> = \frac{d^2}{dt_1 dt_2}<\xi(t_1)\xi(t_2)>$$
$$= \frac{d^2}{dt_1 dt_2}F(t_2 - t_1) = -\frac{d^2}{dt^2}F(t)(\text{не потеряйте знак "минус"!})$$

Подставляем $F(t)$ из результатов Дуба и получаем:

$$G(t) = -\frac{d^2}{dt^2}F(t) = -\frac{d^2}{dt^2}(F(0)e^{-\Gamma t}) = -\Gamma^2 F(0)e^{-\Gamma t}$$

Мы нашли $G(t)$, что от нас и хотели в условии. Но это не всё: также от нас хотят связать спектральные мощности $J(\omega)$ и $I(\omega)$.

Строго тут надо аккуратно подсчитать комплексный интеграл

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Путём «нетрудно заметить, что» (таким же путём идёт Квасников).

Очевидно, что

$$I(\omega) = \omega^2 J(\omega)$$

ω^2 вылезает, когда мы дважды будем дифференцировать комплексную экспоненту.

Ответ обычно представляют в другой форме:

$$I(\omega) = \omega^2 J(\omega) = \{\text{пользуемся результатами Дуба о виде } J(\omega)\}$$

$$= \omega^2 * \frac{F(0) * \Gamma}{\pi(\Gamma^2 + \omega^2)} = \frac{\Gamma}{\pi} F(0) - \Gamma^2 J(\omega)$$

Интерпретация: подмешивается белый шум $\frac{\Gamma}{\pi} F(0)$.

Теперь решим 40-ю задачу:

Задача 40.

Определить, как изменится спектральная плотность $J(\omega)$ случайного стационарного процесса $\xi(t)$, если показание прибора, с помощью которого измеряется величина $\xi(t)$, представляет усредненное значение этой величины за интервал времени $(t-\tau,\ t)$. Используя полученный результат, объяснить тысячекратное расхождение теоретической оценки средней скорости броуновской частицы с измеряемой ее величиной по смещению броуновской частицы за время $\tau \sim 0,1$сек.

Там у нас новая случайная величина:

$$\eta(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} \xi(\text{т}) d\text{т}$$

Вообще это так называемое левое усреднение. Правое бы выглядело бы так

$$\eta(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t}^{t+\tau} \xi(\text{т}) d\text{т}$$

На ответ это никак не повлияет, так что будем использовать левое.

Давайте подставим в $\eta(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} \xi(\text{т}) d\text{т}$ $\xi(\text{т})$ через $\xi(\omega)$:

$$\eta(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} d\text{т} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\omega)\, e^{-i\omega\text{т}} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega * \frac{\xi(\omega)}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} e^{-i\omega\text{т}} d\text{т}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega * \frac{\xi(\omega)}{\tau} * \frac{e^{-i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega t}}{i\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega * \xi(\omega) * e^{-i\omega t} * e^{\frac{i\omega\tau}{2}} \frac{e^{\frac{i\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{i\omega\tau}{2}}}{i\omega\tau}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega * \xi(\omega) * e^{-i\omega t} * e^{\frac{i\omega\tau}{2}} sinc\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Т.к.

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

То сравнивая полученные результаты, получаем

$$\eta(\omega) = \xi(\omega) e^{\frac{i\omega\tau}{2}} sinc\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Что нам с этим делать? Нам-то нужно $J_\eta(\omega)$ - спектр мощности. Тут Мостовой предлагается воспользоваться базой с лекцией:

$$< \eta^*(\omega^I)\eta(\omega) > = J_\eta(\omega) * \text{б}(\omega - \omega^I)$$

Где $\eta(\omega)$ - спектр любого стационарного, гауссова, маркова, бла-бла-бла, никто всё равно читать не будет случайного процесса, а $J_\eta(\omega)$ - спектр соответствующей корреляцией.

Ну так вот, подставим в $< \eta^*(\omega^I)\eta(\omega) >$ подсчитанную нами $\eta(\omega)$.

$$< \xi^*(\omega^I) e^{-\frac{i\omega^*\tau}{2}} sinc\left(\frac{\omega^*\tau}{2}\right) * \xi(\omega) e^{\frac{i\omega\tau}{2}} sinc\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) > = J_\eta(\omega) * \text{б}(\omega - \omega^I)$$

Ну и тут надо ещё воспользоваться тем, что

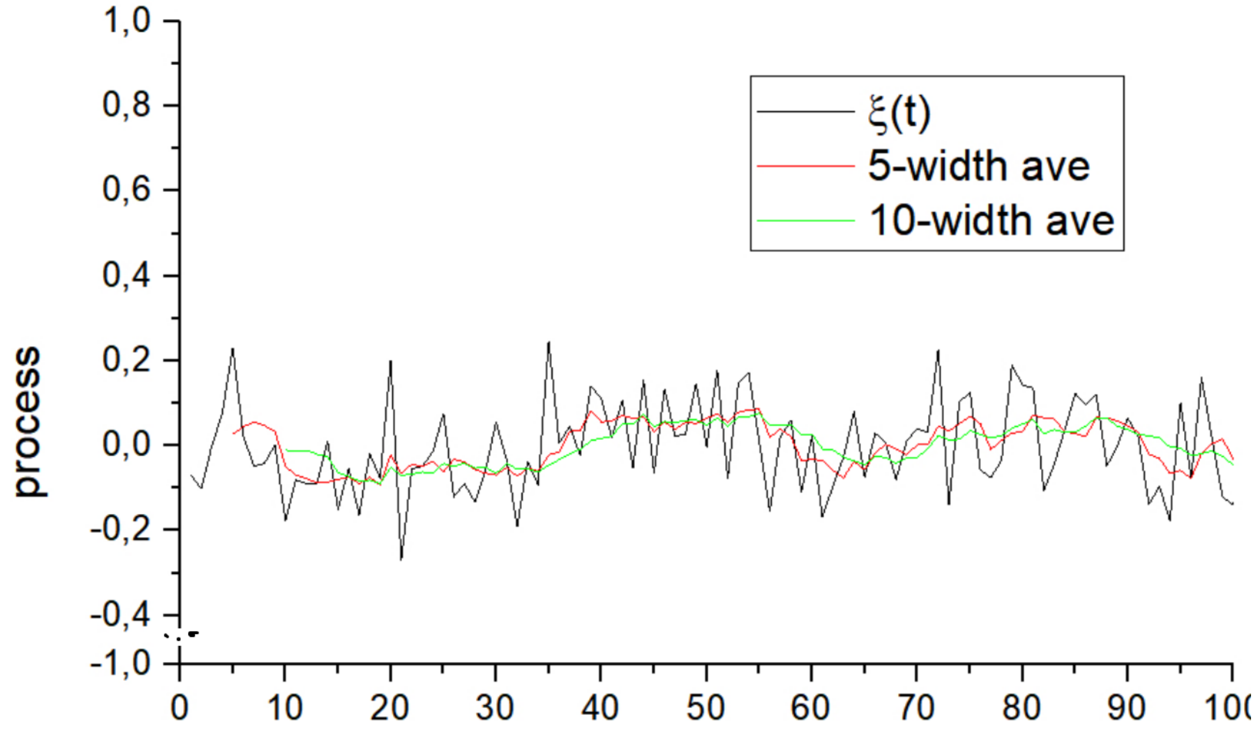
$$< \xi^*(\omega^I)\xi(\omega) > = J_\xi(\omega) * \text{б}(\omega - \omega^I)$$

потому что ξ(ω) – это же случайный как же я марковский устал гауссов какая же стационарный скучная тема процесс ☺

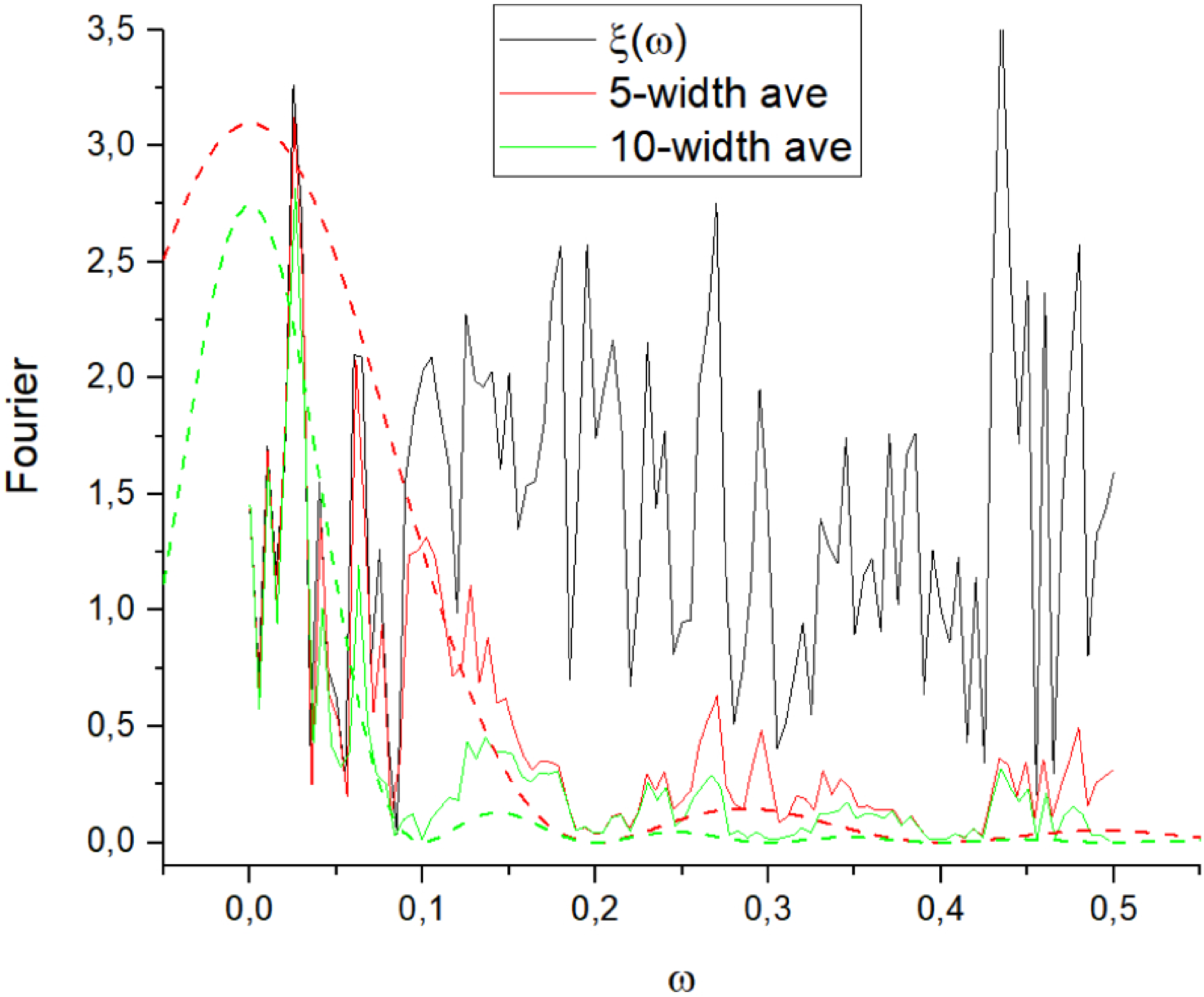
И получаем ответ

$$J_\eta(\omega) = J_\xi(\omega) * sinc^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Давайте посмотрим картинки от Сергея Дмитриевича:



Три процесса – исходный, усреднённый и ещё более усреднённый.
А теперь смотрим, что стало после Фурье:



Пунктиром отмечены sinc-и. Как мы видим, красный график совпадает с чёрным до какой-то частоты, а потом начинает удаляться.
Зелёный аналогично, только тот начинает удаляться ещё раньше.
Так что ответ на вопрос про потери

Задача 40.
Определить, как изменится спектральная плотность $J(\omega)$ случайного стационарного процесса $\xi(t)$, если показание прибора, с помощью которого измеряется величина $\xi(t)$, представляет усредненное значение этой величины за интервал времени $(t-\tau,\, t)$. Используя полученный результат, объяснить тысячекратное расхождение теоретической оценки средней скорости брауновской частицы с измеряемой ее величиной по смещению брауновской частицы за время $\tau \sim 0,1$сек.

как раз заключается в том, при больших частотах мы видим не реальный спектр, а sinc, вызванный прибором.

Напоследок красивая схема для ориентировки:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\xi(t) \arrow[r, shift right, "\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t)\, e^{-i\omega t} dt"'] \arrow[d, shift right, "F(t_2 - t_1) =< \xi(t_1)\xi(t_2) > = F(t)"'] & \xi(\omega) \arrow[l, shift right, "\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega"'] \arrow[d, shift left, "< \xi^*(\omega^I)\xi(\omega) > = J_\xi(\omega) * \text{б}(\omega - \omega^I)"] \\
F(t) \arrow[u, shift right] \arrow[r, shift right, "J(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-i\omega t} dt"'] & J(\omega) \arrow[l, shift right, "F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega"'] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$